Διακριτά Μαθηματικά

Φροντιστήριο

Γεννήτριες Συναρτήσεις Ι

Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της σταθερής ακολουθίας $5, 5, \ldots$;

Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της σταθερής ακολουθίας $5, 5, \ldots$;

- Πρόκειται για την ακολουθία $\alpha_n = 5$, για κάθε n.
  Επομένως, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5z^n = 5 + 5z + 5z^2 + 5z^3 + \ldots = 5(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) =$$

$$5\frac{1}{1-z} = \frac{5}{1-z}$$

Έχουμε 2 άσπρες και άπειρες μαύρες μπάλες. Με πό τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n μπάλες όταν διαλέγουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες;

Έχουμε 2 άσπρες και άπειρες μαύρες μπάλες. Με πό τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n μπάλες όταν διαλέγουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες;

Στην επιλογή των άσπρων μπαλών αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(1 + z + z^2)$$

Στην επιλογή των μαύρων μπαλών, επειδή θέλουμε τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες, αντιστοιχεί ο παράγοντας:

$$(z^2 + z^3 + z^4 + \dots)$$

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A(x) = (1 + z + z^2)(z^2 + z^3 + z^4 + \dots) =$$

$$(z^2 + z^3 + z^4 + \dots) + (z^3 + z^4 + z^5 + \dots) + (z^4 + z^5 + z^6 + \dots) =$$

$$z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 3z^6 + \dots$$

Οι συνετελεστές δείχνουν τις αντίστοιχες απαντήσεις.

Έχουμε 2 άσπρες και άπειρες μαύρες μπάλες. Με πό τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε n μπάλες, όταν διαλέγουμε υποχρεωτικά τουλάχιστον 2 μαύρες μπάλες;

$$z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 3z^6 + \dots$$

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 5 μπάλες;
Η απάντηση βρίσκεται στο συντελεστη του z^5: με 3 τρόπους.
Πράγματι, οι δυνατές επιλογές είναι:
5 μαύρες μπάλες
4 μαύρες και 1 άσπρη μπάλα
3 μαύρες μπάλες και 2 άσπρες μπάλες

Έχουμε 10 άσπρες μπάλες και διαλέγουμε κάποιες α αυτές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Έχουμε 10 άσπρες μπάλες και διαλέγουμε κάποιες απ' αυτές. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

- Μπορούμε να διαλέξουμε 0,1,2,...,10 άσπρες μπάλες με 1 τρόπο κάθε φορά, ενώ 10,11,... με κανέναν τρόπο. Άρα, η

  αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{10} + 0 + 0 + ... = \frac{1 - z^{11}}{1 - z}$$

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές, όταν πρέπει να πάρουμε περιττό αριθμό από άσπρες και άρτιο αριθμό από κόκκινες μπάλες;

Έχουμε άσπρες, πράσινες και κόκκινες μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε r από αυτές, όταν πρέπει να πάρουμε περιττό αριθμό από άσπρες και άρτιο αριθμό από κόκκινες μπάλες;

- Για τις άσπρες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
$$z + z^3 + z^5 \dots = z(1 + z^2 + z^4 \dots)$$
- Για τις κόκκινες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
$$1 + z^2 + z^4 + \dots$$
- Για τις πράσινες μπάλες ο απαριθμητής είναι:
$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}$$
- Το πλήθος των τρόπων, που ζητάω δίνεται από το συντελεστή του z^r στο:
$$z(1 + z^2 + z^4 \dots)^2 \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z} \left(\frac{1}{1-z^2}\right)^2$$

Έχουμε 20 μαρκαδόρους, 6 μαύρους, 10 πράσινους κα
κόκκινους. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους μοιράσουμε σε 2 άτομα, ώστε καθένα να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα;

Έχουμε 20 μαρκαδόρους, 6 μαύρους, 10 πράσινους και 4 κόκκινους. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τους μοιράσουμε σε 2 άτομα, ώστε καθένα να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα;

- Υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε μαρκαδόρους στο 1ο άτομο, σύμφωνα με τους περιορισμούς, αφού αυτό καθορίζει μοναδικά αυτούς, που θα πάρει το 2ο άτομο.
  Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι:
  Για τους μαύρους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^5$
  Για τους πράσινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^9$
  Για τους κόκκινους μαρκαδόρους: $z + z^2 + z^3$
  Δηλ. τελικά:
  $(z + z^2 + z^3 + \ldots + z^5)(z + z^2 + z^3 + \ldots + z^9)(z + z^2 + z^3)$
  Το ζητούμενο πλήθος τρόπων δίνεται από το συντελεστή του z^{10} στην παραπάνω παράσταση που είναι 15.

Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας: $2, 7, 29, 133, \ldots, 2^n + 5^n, \ldots$

Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας: $2, 7, 29, 133, \ldots, 2^n + 5^n, \ldots$

- $A(x) = 2^0 + 5^0 + (2^1 + 5^1)x + (2^2 + 5^2)x^2 + \ldots =$

  $(2^0 + 2x + 2^2x^2 + \ldots) + (5^0 + 5x + 2^5x^2 + \ldots) =$

  $[(2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + \ldots] + [(5x)^0 + (5x)^1 + (5x)^2 + \ldots] =$

  $\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-5x} = \frac{1-5x+1-2x}{1-7x+10x^2} = \frac{2-7x}{1-7x+10x^2}$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 + 2x}$$

Να υπολογιστεί η ακολουθία με γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x}$$

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x} = -3x + 3 - \frac{1}{2x+1} =$$

$$= 3 - 3x - (1+2x)^{-1} = 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} 2^k x^k =$$

$$= 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k = 2 - x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \ldots.$$