Στοιχειώδης συνδυαστική

- Ομάδες μη διακεκριμένων (δηλ. ίδιων) αντικειμένων

Μετρήσεις αντικειμένων σε ομάδες

- n αντικείμενα διαχωρισμένα σε t ομάδες ίδιων (μη διακεκριμένων) αντικειμένων, με πλήθος στοιχείων $q_1, q_2, ..., q_t$ αντίστοιχα.
- Διατάξεις n τέτοιων αντικειμένων: $\dfrac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$
  Υπάρχουν $n!$ τρόποι να διατάξω n διαφορετικά (διακεκριμένα) αντικείμενα. Επειδή όμως τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα) μεταξύ τους, διαιρώ με τον αριθμό των δυνατών διατάξεων κάθε ομάδας $(q_1!...q_t!)$.
- Συνδυασμοί n τέτοιων αντικειμένων:
  $(q_1+1)(q_2+1)...(q_t+1)-1$
  Μπορώ να επιλέξω το πρώτο αντικείμενο των n με (q_1+1) τρόπους: είτε να μην το επιλέξω, είτε να το επιλέξω μια φορά, είτε δυο φορές, ..., είτε q_1 φορές. Ομοίως για τα υπόλοιπα. Ο όρος '-1' μπαίνει στο τέλος για να μην μετρήσω το ενδεχόμενο να μην επιλέξω κανένα αντικείμενο.

Έχω 7 α, 8 β, 5 γ και 4 δ. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορώ να φτιάξω με αυτά;

- $\frac{24!}{7!8!5!4!}$

Με πόσους τρόπους μπορούν να χρωματιστούν 12 μπάλες, έτσι ώστε 3 να είναι κόκκινες, 2 ροζ, 2 άσπρες και οι υπόλοιπες πράσινες;

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να διατάξω τις 12 μπάλες; $\Leftrightarrow$ Πόσες μεταθέσεις των 12 μπαλών υπάρχουν; $12!$
- Θεωρώ ότι πάντα χρωματίζω κόκκινες τις 3 πρώτες, ροζ τις 2 επόμενες, άσπρες τις 2 επόμενες και πράσινες τις υπόλοιπες, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά μέσα στις ομάδες αυτές $\Rightarrow$ Μετράω 1 από τις $3!$ αρχικές (κόκκινες) τριάδες, 1 από τις $2!$ επόμενες (ροζ) δυάδες, μία από τις $2!$ επόμενες (άσπρες) δυάδες και 1 από τις επόμενες $5!$ (πράσινες) πεντάδες.
- Άρα, έχω συνολικά $\dfrac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 5!} = 166.320$ τρόπους.

Στοιχειώδης συνδυαστική

- Υποσύνολα

Υποσύνολα

- Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και δε μετράει η σειρά. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω ένα ή περισσότερα από n αντικείμενα;
  - Για κάθε ένα από τα n αντικείμενα υπάρχουν 2 τρόποι: να το επιλέξω ή να μην το επιλέξω και θέλω να επιλέξω τουλάχιστον 1 αντικείμενο

$$\Rightarrow \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ φορές}} - 1 = 2^n - 1 \text{ τρόποι}$$

(αφαιρώ 1 για να εξαιρέσω την περίπτωση, που δεν επιλέγω κανένα αντικείμενο)

- Υπάρχουν $C(n, k)$ τρόποι να διαλέξω k αντικείμενα από n $\Rightarrow$

$$2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) + 1 \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

Υποσύνολα

- Έχουμε t ομάδες που περιέχουν αντίστοιχα $q_1, q_2, ..., q_t$ ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα. Δε μετράει η διάταξη. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω ένα ή περισσότερα αντικείμενα;
  - Για κάθε ομάδα t_i έχω q_{t_i} επιλογές $+ 1$ (δεν επιλέγω κανένα στοιχείο από την ομάδα).
  - Άρα συνολικά έχω: $(q_1 + 1)(q_2 + 1)...(q_t + 1) - 1$ τρόπους.

Ποιος είναι ο αριθμός των διαιρετών του 180; (Εναλλακτική λύση)

- $180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- Οι διαιρέτες σχηματίζονται από συνδυασμούς από τις εξής τρεις ομάδες: $A = \{2, 2\}$, $B = \{3, 3\}$ και $\Gamma = \{5\}$
  - Από την ομάδα A μπορώ να επιλέξω 1, 2 ή κανένα στοιχείο (3 επιλογές)
  - από την ομάδα B μπορώ να επιλέξω 1, 2 ή κανένα στοιχείο (3 επιλογές)
  - από την ομάδα Γ μπορώ να επιλέξω 1 ή κανένα στοιχείο (2 επιλογές)
- Έπομένως, ο αριθμός των διαιρετών του 180 είναι $(2+1)(2+1)(1+1) = 18$. Δεν αφαιρώ 1 για την περίπτωση $2^0 3^0 5^0 = 1$ γιατί δίνει διαιρέτη του 180.

Σύντομη επανάληψη...

- Ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο κατά n τρόπους, τότε ένα από τα δύο μπορεί να συμβεί με $m+n$ τρόπους ενώ και τα δύο μπορούν να συμβούν κατά $m \cdot n$ τρόπους.
- Χωρίς επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n,r) = \underbrace{n(n-1)...(n-r+1)}_{r \text{ όροι}} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
  - $C(n,r) = \dbinom{n}{r} = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- Με επαναλήψεις στοιχείων:
  - $P(n,r) = \underbrace{n \cdot n... \cdot n}_{r \text{ φορές}} = n^r$
  - $C(n,r) = \dbinom{n+r-1}{r}$

Σύντομη επανάληψη...

Δίνονται n αντικείμενα διαχωρισμένα σε t ομάδες, με πλήθος στοιχείων $q_1, q_2, ..., q_t$ αντίστοιχα, και τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι ίδια (δεν είναι διακεκριμένα)

- Διατάξεις: $\dfrac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$
- Συνδυασμοί: $(q_1+1)(q_2+1)...(q_t+1)-1$

Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και δε μετράει η σειρά. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω ένα ή περισσότερα από n αντικείμενα;

- $\Rightarrow \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n \text{ φορές}} - 1 = 2^n - 1$ τρόποι
- Υπάρχουν $C(n, k)$ τρόποι να διαλέξω k αντικείμενα από n $\Rightarrow$

$$2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=1}^{n} C(n, k) + 1 \Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί 1) $\dfrac{(3n)!}{2^n 3^n}$ και 2) $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ ακέραιοι.

Για το 1):

- Έχουμε $3n$ στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες.
- Κάθε μία από τις n ομάδες περιέχει 3 ίδια στοιχεία.
- Ο αριθμός των μεταθέσεων των $3n$ στοιχείων είναι:

$$\frac{(3n)!}{3!3!\ldots 3!} = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{(2\cdot 3)^n} = \frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$$

που είναι ακέραιος γιατί αναπαριστά αριθμό μεταθέσεων.

Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί 1) $\dfrac{(3n)!}{2^n 3^n}$ και 2) $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ ακέραιοι.

Για το 2):

- Έχουμε n^2 στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες.
- Κάθε μία από τις n ομάδες περιέχει n ίδια στοιχεία.
- Ο αριθμός των μεταθέσεων των n^2 στοιχείων είναι:

$$\frac{(n^2)!}{n!n!\ldots n!} = \frac{(n^2)!}{(n!)^n}$$

που είναι αριθμός διαιρετός με $n!$ αφού για κάθε μια από τις μεταθέσεις των n στοιχείων έχουμε ίσο αριθμό μεταθέσεων των n^2 στοιχείων. Επομένως και ο αριθμός $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιος.

(α) Πόσες από τις 2^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;
(β) Πόσες από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες r ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;

Για το (α):

- Χωρίζω τις 2^r δυαδικές ακολουθίες μήκους r σε 2^{r-1} ζευγάρια, έτσι ώστε οι ακολουθίες σε κάθε ζευγάρι να διαφέρουν μόνο στο δεξιότερο ψηφίο τους (δηλ. στο στοιχείο της r-ής θέσης τους).
- Σε κάθε ένα από τα ζεύγη αυτά μόνο μία από τις ακολουθίες έχει άρτιο αριθμό μονάδων.
- Επομένως, υπάρχουν 2^{r-1} ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων.

(α) Πόσες από τις 2^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων; (β) Πόσες από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες r ψηφίων περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων;

Για το (β):

- Από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες 3^r περιέχουν μόνο τα ψηφία 2,3 και 4. Αυτές συμπεριλαμβάνονται σε εκείνες, που έχουν άρτιο αριθμό μονάδων.
- Τις υπόλοιπες $5^r - 3^r$ ακολουθίες τις χωρίζουμε σε ομάδες ανάλογα με το σχηματισμό των ψηφίων 2,3 και 4, που περιέχουν. Σε κάθε μια από αυτές τις ομάδες οι μισές ακολουθίες θα περιέχουν άρτιο αριθμό μονάδων.
- Επομένως, ο συνολικός αριθμός των πενταδικών ακολουθιών r ψηφίων με άρτιο πλήθος μονάδων είναι: $3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r)$.

Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n από τα δοσμένα $2n$ αντικείμενα;

Μπορούμε να διαλέξουμε n αντικείμενα από τα $2n$ ως εξής:

- διαλέγω με 1 τρόπο n ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{0}$ τρόπους 0 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-1$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- διαλέγω με 1 τρόπο $n-2$ ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{2}$ τρόπους 2 από τα διαφορετικά n αντικείμενα,
- κ.ο.κ.
- διαλέγω με 1 τρόπο 0 ίδια αντικείμενα και με $\binom{n}{n}$ τρόπους n από τα διαφορετικά n αντικείμενα.

Άρα συνολικά: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ τρόπους.

Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω n από τα δοσμένα $2n$ αντικείμενα;

Εναλλακτική λύση:

- Θεωρούμε n διαδοχικές θέσεις όπου κάθε μία αντιπροσωπεύει ένα από τα n διαφορετικά αντικείμενα.
- Για κάθε μία από αυτές τις θέσεις έχουμε 2 επιλογές: να επιλέξουμε το αντικείμενό της ή να μην το επιλέξουμε και να βάλουμε στη θέση του ένα από τα n ίδια αντικείμενα.
- Άρα, συνολικά: 2^n τρόποι.