

Εξέταση στο μάθημα “Διακριτά Μαθηματικά Ι”

Σεπτέμβριος 2004

ΘΕΜΑΤΑ

1. (4 μονάδες) Έστω  $f(n)$  ο αριθμός των διαμερίσεων  $n$  διακεκριμένων αντικειμένων σε μη διακεκριμένα υποσύνολα των 2 στοιχείων.

(a) Να δείξετε ότι

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1), & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

(b) Να αποδείξετε ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας  $f(n)$  είναι ίση με  $e^{\frac{x^2}{2}}$ .

2. (3 μονάδες) Να αποδείξετε με γεννήτριες συναρτήσεις τις παρακάτω σχέσεις (την πρώτη μπορείτε, αν θέλετε, να την αποδείξετε και με συνδυαστικά επιχειρήματα μόνο).

(a)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

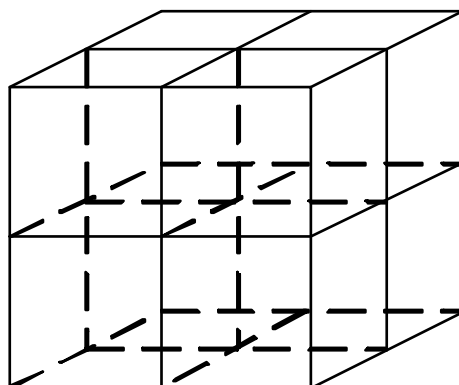
(b)

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της συνέλιξης για τις ακολουθίες  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$

και  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ .

3. (3 μονάδες) Σε ένα κατάστημα παιχνιδιών, ο καταστηματάρχης ζητάει από τον μοναδικό υπάλληλο να φτιάξει στην βιτρίνα ένα σύνθετο κύβο διαστάσεως  $2 \times 2 \times 2$  που να αποτελείται από απλούς μονόχρωμους κύβους (ως στοιχειώδης μονάδα για τις διαστάσεις δίνεται το μήκος του απλού κύβου). Ο σκελετός αυτού του κύβου δίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Τελειώνοντας την δουλειά του, ο καταστηματάρχης του δηλώνει ότι περιμένει από αυτόν κάθε μέρα να φτιάχνει ένα διαφορετικό κύβο. Πόσος χρόνος του απομένει μέχρι να παρατηρήσει το αφεντικό του επαναλήψεις στο μοτίβο των κύβων αν έχει στη διάθεσή του τέσσερα χρώματα κύβων και:

- i. απεριόριστο αριθμό από το κάθε χρώμα.
- ii. δυο κύβους από το κάθε χρώμα.
- iii. θέλει να χρησιμοποιήσει ακριβώς τρεις κύβους από το πρώτο χρώμα.

Σημείωση: Μην κάνετε τις τελικές πράξεις. Απλά περιγράψτε πως θα υπολογίσετε τα παραπάνω ζητούμενα.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Γιώργος Γεωργιάδης