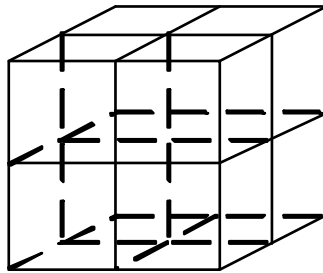


Εξέταση στο μάθημα “Διακριτά Μαθηματικά Ι”

Φεβρουάριος 2004

ΘΕΜΑΤΑ

1. (3 μονάδες) Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που ένα σύνολο από r μη διακεκριμένα αντικείμενα ($r \geq 6$) μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσύνολα διακεκριμένα, ανά δυο ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον δυο αντικείμενα (η ένωση των τριών υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα), χρησιμοποιώντας (i) στοιχειώδη συνδυαστική και (ii) γεννήτριες συναρτήσεις.
2. (3 μονάδες) Να υπολογιστεί κλειστός τύπος για το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ με την βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων.
Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_k = k^2$.
3. (2 μονάδες) Μη τετραγωνικοί λέγονται οι αριθμοί εκείνοι που δεν αποτελούν πολλαπλάσιο κάποιου τετραγώνου αριθμού. Πόσοι μη τετραγωνικοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 100;
4. (2 μονάδες) Σε ένα κατάστημα παιχνιδιών, ο καταστηματάρχης ζητάει από τον μοναδικό υπάλληλο να φτιάξει στην βιτρίνα ένα σύνθετο κύβο διαστάσεως $2 \times 2 \times 2$ που να αποτελείται από απλούς μονόχρωμους κύβους (σαν στοιχειώδης μονάδα για τις διαστάσεις δίνεται το μήκος του απλού κύβου). Ο σκελετός αυτού του κύβου δίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Τελειώνοντας την δουλειά του, ο καταστηματάρχης του δηλώνει ότι περιμένει από αυτόν κάθε μέρα να φτιάχνει ένα διαφορετικό κύβο. Πόσος χρόνος του απομένει μέχρι να παρατηρήσει το αφεντικό του επαναλήψεις στο μοτίβο των κύβων αν έχει στη διάθεσή του τέσσερα χρώματα κύβων και:

- i. απεριόριστο αριθμό από το κάθε χρώμα.
- ii. δυο κύβους από το κάθε χρώμα.
- iii. θέλει να χρησιμοποιήσει ακριβώς τρεις κύβους από το πρώτο χρώμα.
- iv. θέλει να χρησιμοποιήσει τουλάχιστον τρεις κύβους από το πρώτο χρώμα.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Γιώργος Γεωργιάδης