

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2002

1. Δίνονται δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα από διακεκριμένα αντικείμενα $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ και $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ με n στοιχεία το κάθε ένα. Δίνεται επίσης και ένα σύνολο $Y = \{v_1, \dots, v_n\}$ από n διακεκριμένες υποδοχές. Με επιχειρήματα στοιχειώδους συνδυαστικής να απαντηθούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα αντικείμενα στις υποδοχές έτσι ώστε κάθε υποδοχή να δεχθεί ακριβώς ένα αντικείμενο από το σύνολο A και ακριβώς ένα αντικείμενο από το σύνολο B ; (Δεν μετράει η διάταξη εντός κάθε κουτιού.)

β) Υποθέτουμε ότι τα αντικείμενα του συνόλου A είναι χωρισμένα σε t ζένες μεταξύ τους ομάδες A_1, \dots, A_t με πλήθη $a_i, i = 1, \dots, t$, αντίστοιχα, και ότι τα αντικείμενα του B είναι χωρισμένα σε s ζένες μεταξύ τους ομάδες B_1, \dots, B_s με πλήθη $b_i, i = 1, \dots, s$, αντίστοιχα, έτσι ώστε τα αντικείμενα της ίδιας ομάδας να είναι μη διακεκριμένα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των αντικειμένων στις υποδοχές κατά τρόπο που περιγράφεται στο προηγούμενο ερώτημα; Να δικαιολογήσετε απλά και σύντομα τις απαντήσεις σας.

2. Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n} z^k, \quad n \geq 0.$$

3. Με χρήση εγκλεισμού-αποκλεισμού υπολογίστε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

όπου x_1, x_2, x_3 είναι φυσικοί αριθμοί με τους περιορισμούς: $x_1 \leq 3, x_2 \leq 5, x_3 \leq 6$.

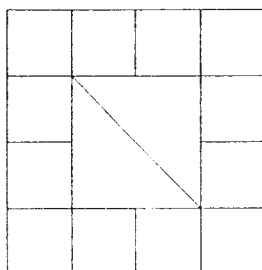
4. Η παρακάτω σκακιέρα κινείται ελεύθερα στο χώρο. Αν κάθε περιοχή (τετράγωνη-τρίγωνη) πρέπει να χρωματισθεί με ένα από τα χρώματα μπλέ, κόκκινο και πράσινο,

α) με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τη σκακιέρα;

β) Βρείτε το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών ώστε να υπάρχουν 8 μπλέ, 4 κόκκινες και 2 πράσινες περιοχές.

γ) Όμοια, τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς ώστε να μην υπάρχει κόκκινη περιοχή.

δ) Όμοια, τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς ώστε να υπάρχει τουλάχιστον 1 κόκκινη και 2 μπλέ περιοχές. *Υποσημείωση:* Μην κάνετε τις τελικές πράξεις. Απλώς περιγράψτε πώς θα υπολογίσετε τα παραπάνω ζητούμενα.



Καλή επιτυχία!
Λευτέρης Κυρούσης
Αλέξης Καπόρης