

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Οκτώβριος 2001

ΘΕΜΑΤΑ

1. (3 Μονάδες)

Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις ότι:

$$\sum_{j=0}^r \binom{n}{r-j} (-1)^j = \binom{n-1}{r}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα τις γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών (ως προς r) $\alpha_r = \binom{n}{r}$ και $\beta_r = (-1)^r$. Ποιά είναι η συνέλιξη των ακολουθιών αυτών;

2. (3 Μονάδες)

(i) Έστω n αντικείμενα διαμερισμένα σε τρεις ομάδες πληθαρικών k_1, k_2 και k_3 , αντίστοιχα. Αν τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι μη διακεκριμένα μεταξύ τους να υπολογίσετε πόσες διατάξεις των n αντικειμένων υπάρχουν. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με επιχειρήματα από τη στοιχειώδη συνδυαστική.

(ii) Να αποδείξετε, με επιχειρήματα από τη στοιχειώδη συνδυαστική, ότι

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}.$$

3. (2 Μονάδες)

(i) Μια σκακιέρα διαστάσεων 2×4 κινείται ελεύθερα στο επίπεδο. Διαθέτοντας κόκκινο, πράσινο και μπλε χρώμα για κάθε ένα τετράγωνο της σκακιέρας με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να τη χρωματίσουμε;

(ii) Βρείτε το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών της σκακιέρας για τους οποίους υπάρχουν 2 κόκκινα, 3 πράσινα και 3 μπλε τετράγωνα.

(iii) Ποιό το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών της σκακιέρας για τους οποίους υπάρχει τουλάχιστον ένα κόκκινο τετράγωνο;

4. (2 Μονάδες)

Με χρήση της αρχής του εγκλεισμού-αποκλεισμού βρείτε το πλήθος των επί συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και πεδίο τιμών στο σύνολο $\{8, 9, 10\}$.

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Αλέξης Καπόρης.