

Εξέταση στο μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι»

Ιούνιος 1997

ΘΕΜΑΤΑ

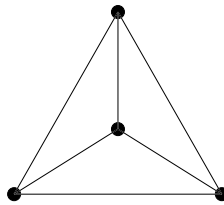
1. Να υπολογιστεί το πλήθος των τρόπων που ένα σύνολο από r διακεκριμένα αντικείμενα ($r \geq 6$) μπορεί να χωριστεί σε τρία υποσύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να έχει τουλάχιστον δύο αντικείμενα (η ένωση των τριών υποσυνόλων θα περιέχει όλα τα r αντικείμενα).

2. Να αποδειχτεί ο τύπος της συνέλιξης του Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

χρησιμοποιώντας (i) συνδυαστικά επιχειρήματα, και (ii) ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων.

3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις 4 κορυφές του παρακάτω ισόπλευρου τριγώνου αν έχουμε στην διάθεση μας 4 διαφορετικά χρώματα και θέλουμε το 1ο χρώμα να εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές; Το τρίγωνο μπορεί να κινείται ελεύθερα στο χώρο. (Εξηγήστε την διαδικασία εξαγωγής του τελικού αποτελέσματος, χωρίς να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του.)



4. Δείξτε ότι το πλήθος των θετικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = m, m \text{ θετικός ακέραιος,}$$

με το περιορισμό $x_i \leq c$, για κάθε $i = 1, \dots, r$ (c θετικός ακέραιος) είναι:

$$S = \binom{m-1}{r-1} - \binom{r}{1} \binom{m-c-1}{r-1} + \binom{r}{2} \binom{m-2c-1}{r-1} - \dots + (-1)^r \binom{r}{r} \binom{m-rc-1}{r-1}.$$

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

Λευτέρης Κυρούσης, Ηλίας Σταυρόπουλος.