ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

1. Επειδή $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, είναι $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$

   $\binom{2n}{n}$ σημαίνει να διαλέξουμε n από $2n$ αντικείμενα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:
   Χωρίζουμε τα $2n$ αντικείμενα σε 2 ομάδες ώστε κάθε μία να έχει n αντικείμενα.
   Για $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$, διαλέγουμε i αντικείμενα από την πρώτη ομάδα με $\binom{n}{i}$ τρόπους και $n - i$ αντικείμενα από τη δεύτερη ομάδα με $\binom{n}{n-i}$ τρόπους.
   Για $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$, υπάρχουν $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ τρόποι επιλογής.
   Τα ενδεχόμενα για διαφορετικές τιμές του i είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, οπότε με κανόνα αθροίσματος έχουμε: $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$

2. $A(x) = \dfrac{1 + x - x^2 - x^3}{1 + x - x^2 - x^3} + \dfrac{x}{1 + x - x^2 - x^3} = 1 + \dfrac{x}{1 + x - x^2(1 + x)} = 1 + \dfrac{x}{(1 + x)(1 - x^2)} = 1 + \dfrac{x}{(1 + x)^2(1 - x)}$

   Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

   $\dfrac{x}{(1 + x)^2(1 - x)} = \dfrac{A}{1 - x} + \dfrac{B}{1 + x} + \dfrac{C}{(1 + x)^2} \iff$

   $$x = A(1 + x)^2 + B(1 - x)(1 + x) + C(1 - x) \tag{1}$$

   · Για $x = 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(1)} 1 = A \cdot 2^2 \Longrightarrow \boxed{A = \dfrac{1}{4}}$. Αντικαθιστούμε στην (1):

   $$x - \frac{1}{4}(1 + x)^2 = B(1 - x)(1 + x) + C(1 - x) \tag{2}$$

   · Για $x = -1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(2)} -1 = C \cdot 2 \Longrightarrow \boxed{C = -\dfrac{1}{2}}$. Αντικαθιστούμε στην (2): $x - \dfrac{1}{4}(1 + x)^2 + \dfrac{1}{2}(1 - x) = B(1 - x^2)$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη $\Longrightarrow$

   $$1 - \frac{2}{4}(1 + x) - \frac{1}{2} = -2Bx \tag{3}$$

· Για $x = 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{(3)} 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} = -2B \Longrightarrow -\frac{1}{2} = -2B \Longrightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}}$

· Έχουμε: $A(x) = 1 + \frac{1}{4}(1-x)^{-1} + \frac{1}{4}(1+x)^{-1} - \frac{1}{2}(1+x)^{-2} =$

$$1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k =$$

$$1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k =$$

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}(-1)^k(k+1)\right]x^k = 1 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^6 + \ldots$$

3. Έστω μία ακολουθία μήκους n από Κ και Γ που δίνει ένα πιθανό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε την τελευταία θέση στην ακολουθία και ας τη σημειώσουμε σαν 'ξεχωριστή θέση'. Τότε αν a_n είναι ο αριθμός των ακολουθιών μήκους n, στις οποίες δεν έχουμε δύο διαδοχικά Κ, θα έχουμε την εξής σχέση: Εάν στη θέση n, που ξεχωρίσαμε, έχουμε Γ, τότε θεωρούμε τις θέσεις από 1 εώς $n-1$ σαν μία νέα ακολουθία μήκους $n-1$, στην οποία πάλι δεν πρέπει να έχουμε δύο Κ γειτονικά, ενώ αν στη θέση n έχουμε Κ, τότε επειδή στη θέση $n-1$ πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε Γ, παίρνουμε σαν νέα ακολουθία τις θέσεις από 1 έως $n-2$. Σ' αυτές η ακολουθία μήκους $n-2$ δεν πρέπει να έχει δύο διαδοχικά Κ. Έτσι έχουμε την ομογενή αναδρομική σχέση $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με αρχικές συνθήκες $a_1 = 2$ και $a_2 = 3$.

   Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

   Έτσι,

$$a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

   Άρα,

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,\ \forall n \in N^*.$$

4. Θεωρούμε το σύνολο D των 8 κορυφών του κύβου, το σύνολο $R = x, y$ των 2 χρωμάτων με $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Αν G είναι η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου, θα έχουμε $|G| = 24$ μεταθέσεις, που είναι οι εξής:

   · Η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8.

- 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180°γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90°γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_4^2.
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4.
- 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120°γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με κυκλική αναπαράσταση $x_1^2 x_3^2$.

Συνεπώς, ο δείκτης κύκλων P_G της ομάδας G είναι:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών:

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$$

Θέτουμε $x = y = 1$ και υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών

$$\frac{1}{24}(2^8 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 23$$

, που είναι ο ζητούμενος αριθμός.