

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**  
**ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020 (ΣΕΤ 1)**

1. Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1000 μαθητές. Από αυτούς οι 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές, που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές που δεν μιλάνε καμία γλώσσα; Να χρησιμοποιηθεί ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ - ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ.

Απάντηση:

Έστω  $S$ , το σύνολο των μαθητών με  $N=|S| = 1000$ . Έστω επίσης  $F, I, G$ , τα γεγονότα ένας μαθητής να μιλάει Γαλλικά, Ιταλικά ή Γερμανικά αντίστοιχα. Τότε ψάχνουμε το  $N(\overline{F} \overline{I} \overline{G})$  και σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού Αποκλεισμού έχουμε:

$$N(\overline{F} \overline{I} \overline{G}) = N - N(F) - N(I) - N(G) + N(FI) + N(FG) + N(IG) - N(FIG) = 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$$

2. Να λυθεί το  $6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 6(1/5)^n$ ,  $n=2,3,4,\dots$ . Δίνεται  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 6/5$ .  
Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Απάντηση:

$$6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 6(1/5)^n$$

Επομένως:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 6a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 5a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 6(1/5)^n x^n$$

$$6[A(x) - a_0 - a_1x] - 5x[A(x) - a_0] + x^2A(x) = \frac{6(1/5)^2x^2}{1-(1/5)x} \Rightarrow$$

$$A(x) = (1/5) \frac{x(6-x)}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)x\right]\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)x\right]\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)x\right]} \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{-9}{1-\left(\frac{1}{3}\right)x} + \frac{8}{1-\left(\frac{1}{2}\right)x} + \frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}\right)x} \Rightarrow$$

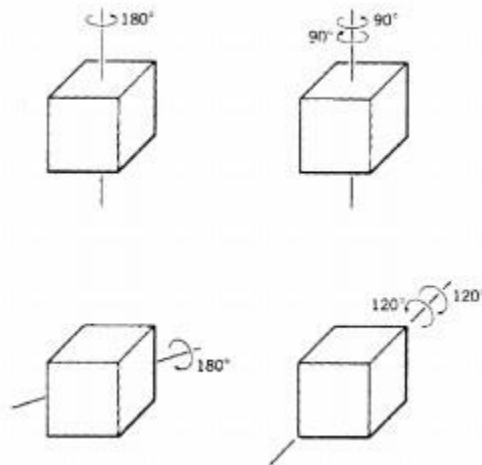
$$\text{Άρα } a_n = (1/2)^{n-2} - (1/3)^{n-2} + (1/5)^n, \text{ για } n = 0, 1, 2, \dots$$

**3. Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω τις κορυφές ενός κύβου με 2 χρώματα; Να χρησιμοποιηθεί θεωρία μέτρησης POLYA.**

**Απάντηση:**

Έστω  $G$  το σύνολο των μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε όλες τις περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στο  $G$ , που ομαδοποιούνται στις παρακάτω κατηγορίες:

- 1) Ταυτοτική μετάθεση. Κυκλική αναπαράσταση:  $x_1^8$
- 2) Τρεις μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180 μοιρών, γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση:  $3x_2^4$
- 3) Έξι μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90 μοιρών γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι όψεων. Κυκλική αναπαράσταση:  $6x_4^2$
- 4) Έξι μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180 μοιρών γύρω από άξονες που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών. Κυκλική αναπαράσταση:  $6x_2^4$
- 5) Οκτώ μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120 μοιρών γύρω από άξονες που συνδέουν απέναντι κορυφές. Κυκλική αναπαράσταση:  $8x_1^2 x_3^2$



**Επομένως ο δείκτης κύκλων του συνόλου μεταθέσεων  $G$  είναι:**

$$P_G = \frac{1}{24} (x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2)$$

**Αφού έχουμε δύο χρώματα, ο κατάλογος προτύπων είναι:**

$$P_G = \frac{1}{24} ((x + y)^8 + 9(x^2 + y^2)^4 + 6(x^4 + y^4)^2 + 8(x + y)^2 (x^3 + y^3)^2)$$

Θέτοντας όπου  $w(x) = w(y) = 1$  στην παραπάνω σχέση, το πλήθος των προτύπων είναι 23 που δίνει και το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των 8 κορυφών του κύβου με 2 χρώματα.

4. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να περάσουν  $k$  (διαφορετικά) αυτοκίνητα από  $n$  διαφορετικούς υπάλληλους διοδίων, όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα; Να χρησιμοποιηθεί ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ.

Απάντηση:

- Το πρώτο αυτοκίνητο έχει  $n$  επιλογές όσοι είναι και οι υπάλληλοι.
- Το δεύτερο αυτοκίνητο έχει  $n+1$  επιλογές: Αν πάει στον υπόλληλο που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο, να πάει πριν ή μετά από αυτό.
- Το τρίτο αυτοκίνητο έχει  $n+2$  επιλογές: Αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο αυτοκίνητο, να πάει πριν ή μετά από αυτό, αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το δεύτερο αυτοκίνητο, να παεί πριν ή μετά από αυτό.

Με τον ίδιο τρόπο σκέψης για όλα τα αυτοκίνητα, καταλήγουμε ότι:

- Το  $k$  αυτοκίνητο έχει  $n+k-1$  επιλογές: όμοια όπως προηγουμένως.

Άρα συνολικά (από τον κανόνα γινομένου) υπάρχουν:

$$n(n+1)\dots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \text{ διαφορετικοί τρόποι.}$$